

Институт вычислительной математики и математической геофизики  
Сибирского отделения Российской академии наук

## Новые методы статистического моделирования распространения коронавирусной инфекции

Лотова Г.З., Лукинов В.Л., Марченко М.А.,  
Михайлов Г.А. и Смирнов Д.Д.

Научная сессия РАН

«Роль науки в преодолении пандемий и посткризисном развитии общества»

15 декабря 2021 г.

## Основные результаты работы

- Предлагается новая стохастическая прогностическая методика, в которой коэффициенты (интенсивности элементарных потоков событий) восстанавливаются по экспериментальным данным на основе соответствующей дифференциальной SEIRD модели.
- Прогноз осуществляется с помощью стохастической пуассоновской модели, которая дает возможность исследовать флуктуации изучаемых характеристик, т.е. строить соответствующие доверительные интервалы.
- Разработанная методика может применяться в задачах с очень большой начальной численностью.
- Было выявлено существенное влияние на прогноз введения инкубационного периода от инфицирования до появления симптомов.

## Математические модели

- Для анализа тренда эпидемиологического процесса коронавирусной инфекции в конкретном городе или регионе в настоящее время активно применяется численное моделирование, причем параметры моделей оцениваются путем усвоения известных статистических данных о количестве инфицированных, умерших и т.д.
- Для численного построения тренда эпидемиологического процесса обычно используются дифференциальные модели, в которых индивидуумы разбиваются на группы или типы: восприимчивые, инфицированные, выздоровевшие и т.д.
- Соответствующие системы дифференциальных уравнений получаются из локального баланса, что вполне обосновано в линейном варианте задачи, когда группы не взаимодействуют, но испытывают превращения с изменением типа.
- Важной деталью модели эпидемии являются запаздывания, соответствующие инкубационным периодам, в основном между инфицированием и заболеванием.

## Дифференциальная SEIRD модель

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -z(t - \tau) \left( \frac{\alpha_I S(t) I(t)}{N} + \frac{\alpha_E S(t) E(t)}{N} \right) + \gamma R(t), \\ \frac{dE}{dt} &= z(t - \tau) \left( \frac{\alpha_I S(t) I(t)}{N} + \frac{\alpha_E S(t) E(t)}{N} \right) - (\kappa + \rho) E(t), \\ \frac{dI}{dt} &= \kappa E(t) - \beta I(t) - \mu I(t), \\ \frac{dR}{dt} &= \beta I(t) + \rho E(t) - \gamma R(t), \\ \frac{dD}{dt} &= \mu I(t)\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь:

- $t$  – время в сутках;  $\tau$  – длина латентного периода
- $S$  – восприимчивые
- $E$  – первично инфицированные «бессимптомники» (латентные)
- $I$  – инфицированные с симптомами («симптомники»)
- $R$  – выздоровевшие
- $D$  – умершие
- $N = S + E + I + R + D$  – вся популяция

Задаются начальные данные при  $t = t_0$ :  $S(t_0)$ ,  $E(t_0)$ ,  $I(t_0)$ ,  $R(t_0)$ ,  $D(t_0)$ .

## Определение коэффициентов

В качестве реальных статистических данных рассматривалось число выявленных за сутки инфицированных индивидуумов, вычисляемое по формуле

$$f_i = f(t_i) = \kappa E(t_{i-1})/c,$$

где  $i$  – номер дня (см. работу [1]<sup>1</sup>).

Для конкретной задачи в [1] взято:

$$E(t_0) = 99, \quad R(t_0) = 24, \quad S(t_0) = 2\,798\,047, \quad I(t_0) = D(t_0) = 0.$$

В [1] при решении обратной задачи по реальным значениям  $\tilde{f}_i$  в интервале от 23.03.20 до 31.05.20 было использовано  $c = 0.58$ .

Нами было использовано значение  $c = 0.51$ , которое дает более точное среднеквадратическое приближение дифференциального решения к экспериментальным данным  $\{\tilde{f}_i\}$  в указанном интервале.

---

<sup>1</sup>[1] O. I. Krivorotko, S. I. Kabanikhin, N. Yu. Zyatkov, A. Yu. Prikhodko, N. M. Prokhoshin, M. A. Shishlenin, Mathematical modeling and forecasting of COVID-19 in Moscow and Novosibirsk region // Numerical Analysis and Applications, 2020, V13, N4, p. 332–348.

## Целесообразность использования стохастических моделей

- При наличии взаимодействий, например, инфицирования больными, целесообразно использование стохастических моделей.
- Для этого вводится «естественное» предположение о том, что реализуется случайный марковский пуассоновский процесс рождения и гибели с превращениями и взаимодействием групп.
- Интервалы времени между событиями процесса предполагаются экспоненциально распределенными.
- Соответственно этому моменты времени составляют точечные пуассоновские потоки с заданными интенсивностями, которые изменяются в моменты взаимодействий и превращений.
- Стохастическая модель дает возможность исследовать флуктуации изучаемых характеристик, т.е. строить соответствующие доверительные интервалы.

## Стохастическая модель

Соответствующая системе SEIRD стохастическая пуассоновская модель определяется таблицей элементарных событий и интенсивностей соответствующих точечных пуассоновских потоков:

Таблица 1

$k$	события	интенсивности
1	$S := S - 1, E_0 := E_0 + 1$	$\frac{(\alpha_I I + \alpha_E (E + E_0)) S}{N}$ , $\alpha_I = 0.999, \alpha_E = 0.999$
2	$E := E - 1, I := I + 1$	$\kappa = 0.042$
3	$E := E - 1, R := R + 1$	$\rho = 0.952$
4	$I := I - 1, R := R + 1$	$\beta = 0.999$
5	$I := I - 1, D := D + 1$	$\mu = 0.0188$
6	$E_0 := E_0 - 1, R := R + 1$	$\rho_0 = 0.920$

## Радикальное ускорение расчетов

- Мы предлагаем способ радикального упрощения численного моделирования на основе объединения элементарных пуассоновских потоков, дающих также пуассоновский поток с суммарной интенсивностью.
- В такой стохастической модели рассматривается стохастическая эволюция всех индивидуумов с корректной реализацией взаимодействий.
- Коэффициенты модели - интенсивности элементарных потоков событий - восстанавливаются по экспериментальным данным на основе соответствующей дифференциальной SEIRD модели.



## Модель с объединением элементарных пуассоновских потоков

Обозначим события через  $\{A_k\}$ , интенсивности через  $\{v_k\}$ , положим

$$V = \sum_{k=1}^6 v_k.$$

Реализация стохастической пуассоновской модели осуществляется следующим рекуррентным способом:

- Пусть в момент  $t$  произошло элементарное событие и определились численности

$$S(t), \quad E(t), \quad I(t), \quad R(t), \quad D(t).$$

- Следующее событие реализуется в момент времени  $t + \tau$ , где  $\tau$  – случайная величина, распределенная экспоненциально с параметром  $V = V(t)$ , то есть

$$\tau = -\frac{\ln \alpha}{V},$$

где  $\alpha$  – случайная величина, распределенная равномерно в интервале  $(0, 1)$ .

- Далее выбирается вариант элементарного события согласно распределению

$$P(A_k) = \frac{v_k}{V},$$

что и определяет численности групп в момент  $t + \tau$  на основе таблицы 1.

## Рис.1. Число выявленных больных в сутки

Проводился сравнительный анализ дифференциальной и стохастических моделей для Новосибирска в период с марта по июнь 2020 года для популяции объемом 2 798 170 человек.

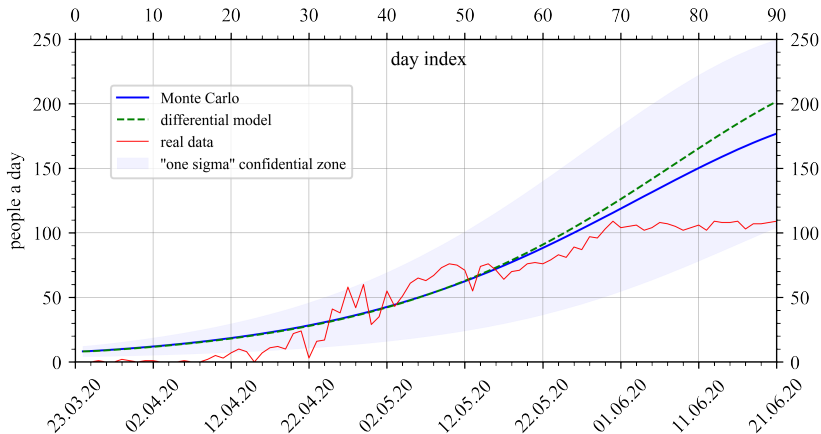


Рис.2. Число выявленных больных в сутки (модель с инкубационным периодом)

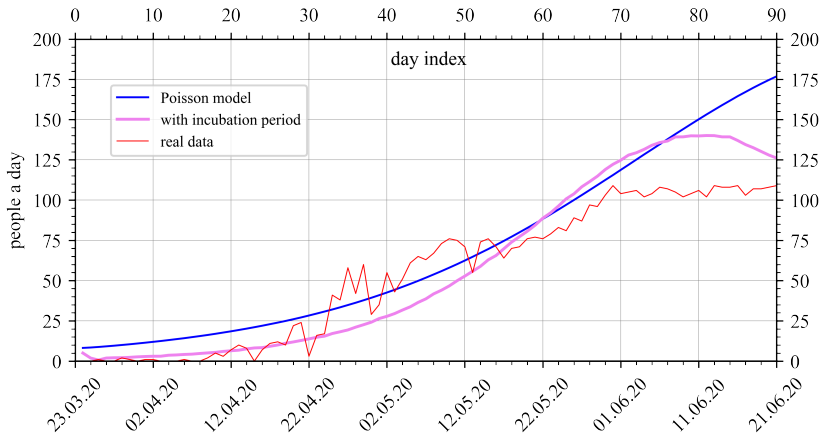


Рис.3. Выборочные графики для пуассоновской модели

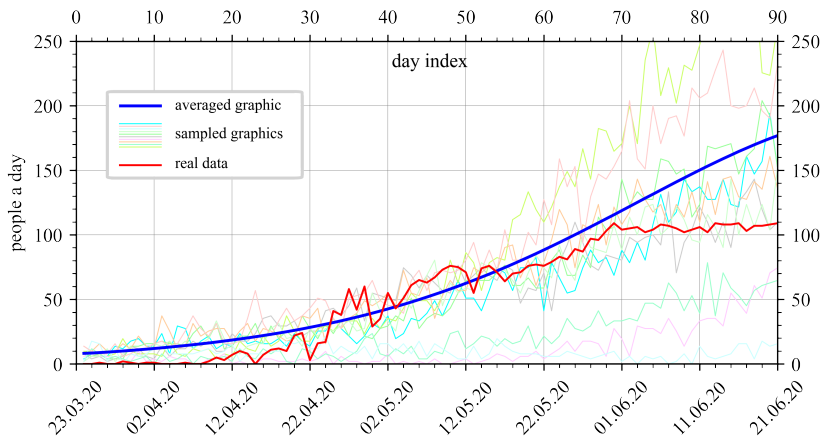
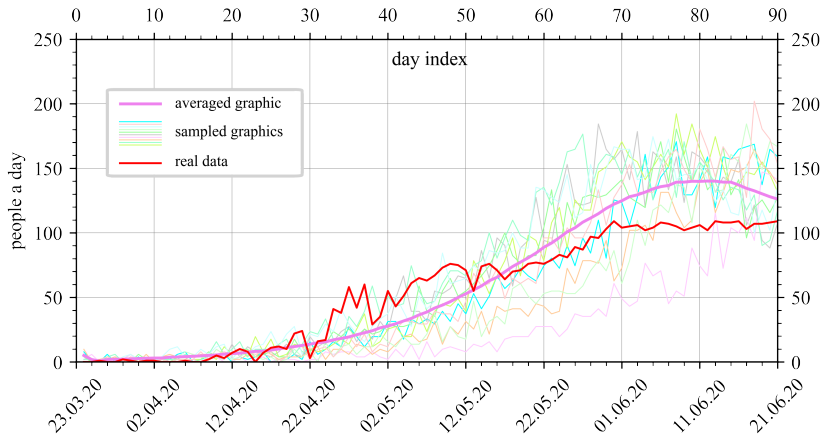


Рис.4. Выборочные графики для модели с инкубационным периодом



## Выводы

1. Разработанная стохастическая модель является универсальной и может применяться для анализа распространения различных инфекций.
2. Стохастическая модель обладает большой гибкостью, хорошей прогностической способностью и вычислительной экономичностью.
3. Соответствующая дифференциальная модель SEIRD может эффективно применяться для оценки параметров стохастической модели – интенсивностей элементарных потоков событий.
4. В стохастической модели можно учитывать дополнительные управляющие события и группы индивидуумов, существенно влияющие на развитие эпидемиологического процесса.

## Предложения по развитию математического моделирования в эпидемиологии

С целью оценки рисков и выработки сценариев устойчивого развития:

1. Организовать в России масштабный междисциплинарный и межведомственный научный проект по исследованиям в области медицины, иммунологии, вирусологии и анализа динамики эпидемиологических процессов (не только пандемии COVID-19) в условиях изменений климата.
2. Обратиться с запросом на предоставление подробных эпидемиологических данных.
3. Считать комплексный численный анализ климатических и эпидемиологических процессов одним из важнейших направлений для новых суперкомпьютерных центров.